

## О НОВЫХ АЛГОРИТМАХ ХЕДЖИРОВАНИЯ ЭКСПОРТНЫХ/ИМПОРТНЫХ ТОВАРНЫХ ПОТОКОВ

*Алексей Чехлов, Олег Батраченко, Михаил Солодухин*

### Исследовательская статья № 2003-1

Thor Asset Management, Inc.

**14 июня 2003 г.**

**Абстракт.** В данной работе предлагаются новые, основанные на решении задач стохастической оптимизации подходы к построению и практической имплементации алгоритмов хеджирования экспортных/импортных товарных потоков. В отличие от практически используемых в настоящее время статических подходов к хеджированию или хеджирования посредством дорогостоящих опционов, предлагаемые алгоритмы являются динамическими, зависящими от конкретной траектории цены на товарный фьючерс, по построению ведущими к максимальной доходности при ограниченных уровнях риска. В подробно разобранном примере о хеджировании 10-дневной покупки сахара №11 продемонстрировано, что данные классы алгоритмов ведут к существенному уменьшению параметров риска (2-кратному уменьшению вероятности среднеожидаемой потери, 4-кратному уменьшению среднеквадратического отклонения) при общем увеличении среднеожидаемой доходности. Данные классы алгоритмов применимы к хеджированию товарных рынков с развитыми и ликвидными мировыми фьючерсными контрактами. К таковым, в особенности, относятся такие товарные рынки как: нефть, природный газ, алюминий, платина, медь, золото, цинк, никель, серебро, кукуруза, соя, пшеница и сахар.

### Товарные рынки и необходимость хеджирования

Россия, как и ее могучий предшественник-СССР, остается одним из ведущих в мире поставщиков сырья на внешние рынки. Это особенно верно по отношению к таким видам сырья как нефть, природный газ, драгоценные (золото, серебро, платина) и не драгоценные (никель, алюминий, железо) металлы. Это очевидно из, например, следующих цифр [1]. Доля России в мировом экспорте сырья составляет (на 2002 г.): нефти – 7%, природного газа – 40%, угля – 4.5%, железной руды – 7%, меди – 9%, никеля – 18%, алюминия – 21%. Одновременно с этим, из всего добываемого объема значительная часть предназначена на экспорт. Например, доля экспорта в объеме добываемого сырья: нефти и нефтепродуктов – 57%, природного газа – 40%, меди – 90%, никеля – 97%, алюминия – 99%, платиноидов – 100%. Зависимость рентабельности отдельных компаний – экспортеров, а в большем масштабе и всей экономики, от мировых цен на данные виды сырья трудно недооценить.

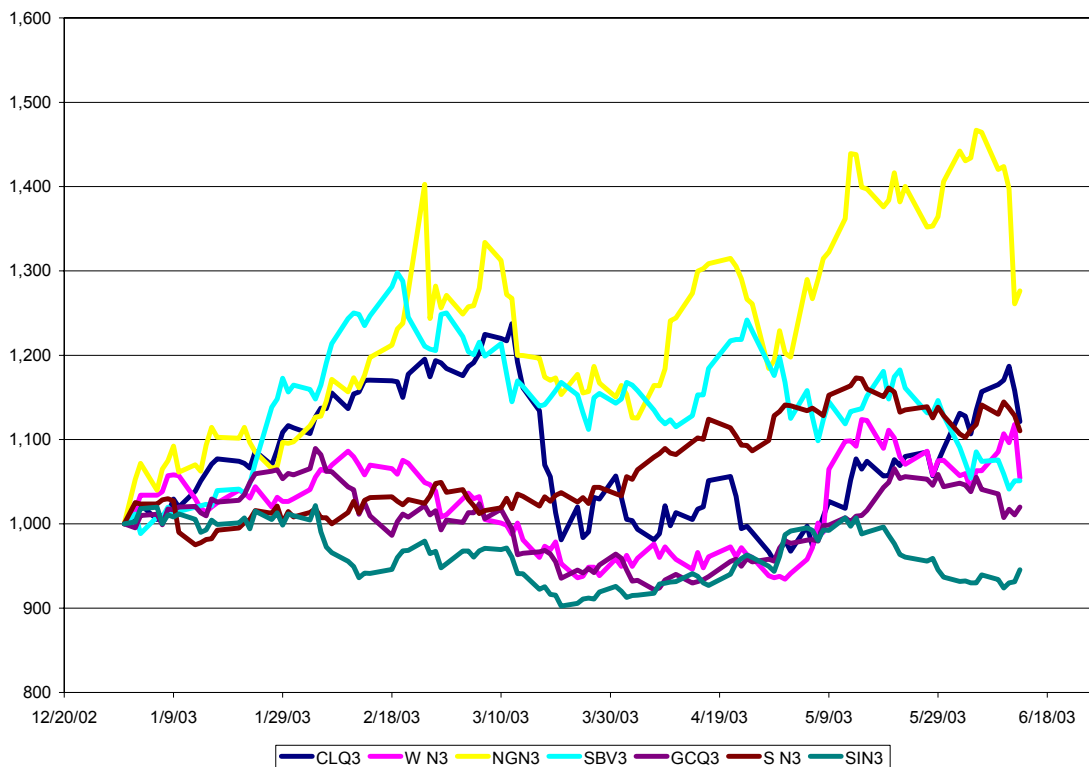
Одновременно с этим, Россия является и одним из ведущих стран-потребителей, и, следовательно, импортеров определенных видов сырья, таких как, например, сахар. Так, например, в 2002 г. физический объем импорта сахара-сырца в Россию составил 4,441,000 тонн, а в стоимостном выражении – \$850.9 млн. В 2001 г. тот же объем был на 18% больше.

Основной риск рентабельности экспортных/импортных предприятий представляет волатильность изменения цен на соответствующий товарный фьючерс. Ниже, в Таблице 1, для примера, приведены характеристики фьючерсных цен на некоторые товарные рынки. Выбраны самые ликвидные фьючерсные контракты на 13 июня 2003 г. Характеристики доходности и волатильности подсчитаны за период 31 декабря 2002 г. – 13 июня 2003 г.

Таблица 1.

Контракт	Название	Истечение	Биржа	Ср. Годовая Доходность	Ср. Годовая Волатильность
CLQ3	Crude Oil	Август 2003	NYMEX	30.1%	29.9%
NGN3	Natural Gas	Июль 2003	NYMEX	64.2%	43.6%
GCQ3	Gold	Август 2003	COMEX	6.0%	17.9%
SIN3	Silver	Июль 2003	COMEX	-11.2%	16.3%
W N3	Wheat	Июль 2003	CBT	15.2%	26.6%
S N3	SoyBean	Июль 2003	CBT	24.8%	16.7%
SBV3	Sugar #11	Октябрь 2003	NYBOT	15.4%	28.9%

Ниже, для иллюстрации масштабов волатильности, приведены графики поведения цен данных фьючерсных контрактов, масштабированных на 1000 на 31 декабря 2002 г.



Как видно из приведенных данных, уровни волатильности основных товарных рынков достаточно велики и сравнимы с волатильностью рынка акций.

Как известно [6,7], волатильность, понимаемая как аннуализированное среднеквадратическое отклонение однодневных доходностей, не всегда дает правильное представление о возможных ожидаемых изменениях цен. Это в

особенности верно для ценовых временных рядов с заметными отклонениями от log-нормального распределения. Для дополнительной иллюстрации возможных ценовых движений (даже на таком незначительном временном интервале как с 31 декабря 2002 г. по 13 июня 2003 г.), в Таблице 2 приводятся анализ таких статистик как *draw-down* (прогиб цен вниз от предыдущего максимума выраженного в процентах от него) и *draw-up* (подъем цен вверх от предыдущего минимума выраженного в процентах от него). Данные характеристики обычно используют для оценки масштабов возможных однонаправленных (вверх или вниз) изменений цен.

Таблица 2.

Контракт	Наихудший draw-down	Средний draw-down	Наилучший draw-up	Средний draw-up
CLQ3	-22.7%	-8.9%	24.2%	9.8%
NGN3	-19.8%	-6.7%	46.7%	23.1%
GCQ3	-15.4%	-7.0%	15.5%	4.9%
SIN3	-11.6%	-5.7%	11.6%	3.4%
W N3	-14.0%	-5.9%	20.2%	5.9%
S N3	-6.0%	-1.7%	20.3%	9.0%
SBV3	-19.8%	-7.8%	31.3%	15.5%

Как видно из приведенных в Таблице 2 данных, могут происходить однонаправленные движения данных рынков в 20-40% как вверх, так и вниз. Такого рода движения рынка могут приводить к существенным уменьшениям либо увеличениям рентабельности экспортных/импортных операций по данным товарам. *Построению динамических алгоритмов хеджирования, приводящих к существенному понижению волатильности среднеожидаемой рентабельности при сохранении ее желаемого уровня и посвящена данная работа.*

### Постановка задачи и некоторые используемые простые решения

Целью компании-экспортера (или компании-производителя) является получение максимальной средней цены продажи своего товара за определенный период. Более точно, целью является получение максимальной рентабельности, которая есть разница между средней за период ценой продажи товара, и средней его себестоимостью. На практике, в силу относительной стабильности себестоимости на внутреннем рынке (скажем, стоимости добычи, транспортировки и хранения золота), можно рассматривать упрощенную постановку, где получение максимальной средней цены продажи товара на внешнем рынке эквивалентна максимальной общей рентабельности экспортной операции.

Аналогично, целью компании импортера является получение минимальной средней цены закупки товара за определенный период. Здесь также как и выше, более точное понятие рентабельности связано с разностью между средней ценой закупки на внешнем рынке и средней ценой реализации на внутреннем. Но в силу относительной стабильности и предсказуемости цен реализации на внутреннем рынке, повышение общей рентабельности импортной компании можно

приблизительно считать эквивалентным минимизации средней цены закупки товара.

Среди распространенных среди экспортных/импортных компаний методов хеджирования следует отметить следующие.

1. Хеджирование (или, используя экспортный/импортный жаргон, «фиксация» цен) происходит лишь за несколько (1-5) дней от ожидаемой покупки/поставки спот товара. При этом, объем поставки был уже известен в течении квартала. Данная стратегия близка к полностью нехеджированной стратегии, и, как правило, объяснима страхом потерять деньги на хедже безотносительно того, что могут произойти потери на основной спот позиции. Данная стратегия является довольно агрессивной с точки зрения всего бизнеса – могут реализоваться большие уровни доходности но и большие потери.
2. Хеджирование производится лишь при очень сильных позитивных для бизнеса изменениях цены (скажем, при падении цены на 30% при импортных операциях сахара). В остальных случаях (в особенности, при негативных для бизнеса изменениях цен) хеджирование не производится. Данная стратегия также является агрессивной с точки зрения всего бизнеса – фиксируются лишь большие уровни доходности, бизнес открыт к большим потерям.
3. Хеджирование производится сразу как только известен объем и время покупки/продажи спот товара. Данная статичная стратегия является ультра-консервативной – фиксируется доходность на начальный момент, волатильность доходности минимизируется, но возможность использовать позитивные изменения цен на товар на рынке не предусмотрена.
4. Хеджирование методом осреднения цены. Период хеджирования (скажем, квартал) разбивается на  $M$  равных интервалов (скажем, в 1 день). Каждый такой интервал (1 день) производится закупка (для импорта) или продажа (для экспорта) равного количества фьючерсных контрактов, эквивалентного количеству товара  $N/M$ , где  $N$  есть общее количество закупаемого или продаваемого в конце периода товара. Данная стратегия, несмотря на ее осредняющие свойства, все равно несет в себе большой риск того, что фиксация произойдет на непривлекательных уровнях цен. Стратегия часто упоминается в литературе, на практике же она частично встречается в виде OTC опционов которые в той или иной форме «гарантируют» цену в конце периода не хуже чем средняя за период.

Также следует отметить использующиеся в индустрии инструменты хеджирования.

### **Инструменты хеджирования и их ликвидность**

В большом количестве случаев экспортными/импортными бизнесами используются опционы (торгуемые на бирже или, так называемые, OTC, т.е. сделанные и оцененные «Группой структурных продуктов» инвестиционного

банка), в особенности различные экзотические опционы (подробнее, см. ниже) торгуемые только OTC. В академической финансовой литературе широко известно утверждение о возможности построения динамической фьючерсной стратегии с достаточной степенью точности воспроизводящей выплату стандартного опциона (неважно put или call).

Сравнивая уровни ликвидности рынков фьючерсов и даже торгуемых на бирже опционов на них, очевидно превосходство фьючерсов. Например, в Таблице 3 приведены наши оценки ликвидности для товарных контрактов, которые мы выбрали выше в качестве примера.

Таблица 3.

Контракт	Bid/Offer Спрэд	Bid/Offer Спрэд в %
<b>CLQ3</b>	0.032	0.11%
<b>NGN3</b>	0.014	0.23%
<b>GCQ3</b>	0.199	0.06%
<b>SIN3</b>	0.006	0.13%
<b>W N3</b>	1.000	0.30%
<b>S N3</b>	1.007	0.16%
<b>SBV3</b>	0.020	0.31%

Оценка ликвидности проводилась на основе анализа исторических цен bid/offer на часовых интервалах за 1 месяц предшествующий 13 июня 2003 г. Из данной таблицы следует, что наиболее ликвидные фьючерсные контракты выбранных нами товарных рынков имеют достаточно высокую ликвидность, немногим уступающую таким наиболее ликвидным фьючерсным рынкам как S&P 500 E-MINI и NASDAQ-100 E-MINI, находящуюся на уровне или чуть ниже чем 0.1% (bid/offer спрэд, в %).

Фьючерсные комиссионные в данном анализе не учитывались, т.к. зависят от переговоров с брокером (что, как правило, связано с опытом клиента и ожидаемым количеством контрактов в год) и находятся в интервале от \$8 до \$50 за покупку и продажу (полный оборот) одного контракта (со средней комиссией в \$20).

Данные уровни фьючерсной ликвидности существенно выше уровней ликвидности на опционы на те же самые контракты, где bid/offer спрэд в % может достигать 10%.

Но еще большая непривлекательность опционов, как правило, заключается в дополнительной премии по сравнению с их, так называемой, риск-нейтральной или без-арбитражной ценой. Это в особенности имеет место при оценке экзотических опционов, где возможность арбитражного выравнивания цены либо затруднена, либо вообще отсутствует в силу отсутствия ликвидности опциона. Известно, что «Группы структурных продуктов» инвестиционных банков «зашивают» в цену продажи опциона дополнительную премию (как правило, больше 10% от его стоимости), которую они позже реализуют самим себе посредством того-же динамического хеджирования их открытой позиции в проданном опционе. По этим

причинам инвестиционные банки и брокеры, и заинтересованы в продаже клиентам опционов, в особенности, таких как «смотрящие назад» (look-back), азиатские (Asian) или паспортные (passport) опционы. Оценить такие опционы клиенту, как правило, не просто, открытый рынок с соревнующимися друг с другом покупателями и продавцами на них отсутствует, и их, поэтому легче продать с высокой встроенной премией.

Стандартным аргументом склонения клиента к покупке опционов является следующий. «Купленный опцион имеет ограниченный риск, т.е. клиент не может потерять больше чем стоимость опциона, которую он заплатил. Фьючерс может потерять неограниченное количество денег». Хотя с формальной точки зрения данное утверждение и является верным, но оно подразумевает, что количество фьючерсных контрактов при негативном изменении цены не меняется. В действительности, правильная динамическая фьючерсная стратегия с высокой точностью повторяет функцию выплаты опциона, последовательно уменьшая количество контрактов при негативном движении цены.

Принимая во внимание все данные факты, можно сделать следующий вывод: *использование опционов при данном уровне из ликвидности является суб-оптимальным по сравнению с правильно выстроенной динамической стратегией во фьючерсах.*

### **Более сложные алгоритмы хеджирования: дельта-хеджирование**

В дополнении к выше перечисленным простым стратегиям хеджирования, стоит добавить еще три более сложных алгоритма, часто упоминающихся, однако в несколько других контекстах:

- a) алгоритм хеджирования, основанный на дельта-хеджировании (идущей от теории оценки простейших деривативов – Европейских опционов – Блэка и Шольца) [2];
- b) алгоритмы оптимальной ликвидации существующей позиции [3];
- c) алгоритмы страховки инвестиционного портфеля [5].

В отношении алгоритмов типов b) и c) мы рекомендуем обратиться к указанным ссылкам. Здесь мы подробнее остановимся на алгоритмах типа a).

Проблема хеджирования Европейских опционов является одним из немногих точно решаемых примеров в теории математических финансов. В соответствии с теорией Блэка-Шольца, в предположении log-нормальности стохастического процесса цены на основной инструмент (например, цену фьючерса), можно вывести правильную цену на Европейский опцион в мире рациональных риск-нейтральных инвесторов. Сторонним продуктом данной теории является дельта-хеджирование, т.е. динамическое определение такого количества фьючерсных контрактов, которое должен иметь инвестор, желающий в каждый данный момент захеджировать свою открытую позицию в Европейском опционе. Хеджирование здесь понимается как нахождение такого количества фьючерсных контрактов, что риск, определяемый как среднеквадратическое однодневное отклонение портфеля, минимален. Данная

задача была решена Блэком и Шольцем точно «в малом» по времени, Это решение может быть иначе интерпретировано следующим образом. Возможно построить переменную по времени позицию в фьючерсах, обычно обозначаемую как  $\Delta$  (отсюда и термин, дельта-хеджирование), такую что поддержание ее в каждый данный момент времени приведет к выплате, противоположной выплате опциона, так что суммарный портфель состоящий из опциона и  $\Delta$  количества фьючерсных контрактов будет обладать минимальным (в пределе стягивания интервала хеджирования к нулю – нулевым) риском.

Несмотря на всю значимость данной теории, были давно замечены следующие проблемы с его практическим применением.

1. Реальные распределения вероятностей цен на различные инструменты отклоняются от log-нормальных. Были замечены и измерены величины этих отклонений и даже найдены более хорошие аналитические формы для реальных функций распределения вероятностей курсов валют и широких индексов акций, таких как распределение Леви [6,7]. Широко известны эффекты сезонности, асимметрии, автокорреляции и проч. в товарных фьючерсах. Это формально запрещает применение формул Блэка-Шольца для подобных рядов.
2. Хеджирование в соответствии с формулой Блэка-Шольца приводит к большим систематическим погрешностям для опционов находящих или OTM (“out-of-the-money”) или ITM (“in-the-money”), а это, как правило, именно те ситуации, в которых и заинтересованы импортеры/экспортные бизнесы.
3. Сам алгоритм использования среднеквадратического однодневного отклонения портфеля как риска разрушается для распределений с, так называемыми, «толстыми» хвостами распределений. Такие временные ряды имеют тенденцию претерпевать резкие подъемы и/или падения гораздо чаще, чем диктуется log-нормальным распределением.
4. Само понятие волатильности не вполне состоятельно так как она меняется (для некоторых ценовых рядов весьма значительно) по времени. Если формально использовать постоянную (например, средне-историческую волатильность), то хеджирование в соответствии с формулой Блэка-Шольца накапливает значительную погрешность.
5. Волатильность наблюдаемая в существующих рынках опционов оказалась зависящей и от таких параметров, как: времени до истечения контракта, ипользуемого времени истечения фьючерса, частоты задания данных на основной инструмент и т.п. Это связано с: не удовлетворительной применимостью в реальных рынках предположений о log-нормальности поведения цен, наличием временной структурой волатильности, «улыбкой» волатильности и проч. явлениями.

Данные и некоторые другие проблемы были замечены в течении уже ряда лет (с середины 90-х годов). Один из успешных методов разрешения таких проблем оказался метод построения, бинарных (или более сложных, тринomialных) деревьев (“implied trees”) воспроизводящих реальное историческое распределение

вероятностей ценового ряда [10]. Другими успешными методами для построения адекватных реальности пространств вероятностных изменений цен являются, так называемые, методы ре-сэмплинга, впервые предложенные в середине 1970-х гг. Б. Эфроном [8].

### **Математическая постановка и метод решения задачи**

Рассмотрим теперь более подробно математическую постановку задачи о хеджировании товарных потоков для случая компании-импортера (можем, для примера подразумевать компанию-импортера сахара-сырца). Задача о хеджировании товарных потоков для компании-экспортера получается из разобранный здесь задачи соответствующей заменой знаков на противоположные.

Допустим, для простоты, что качество товара компании-импортера в точности совпадает с качеством товара лежащего в основе фьючерсного контракта. Также, допустим для простоты, что товар покупается компанией-импортером одним «куском» точно в момент истечения ближайшего фьючерсного контракта. В данной постановке мы позволяем себе пренебречь эффектами наличия разницы в качестве и наличия базиса, сконцентрировавшись на построении оптимальной стратегии для данной идеальной ситуации. Обозначим цену ближайшего фьючерса как  $S(t)$ .

Пусть в начале интервала хеджирования (в момент  $t=0$ , что есть, скажем, 31-е декабря 2002 г.) известно, что в конце интервала хеджирования (в момент времени  $t=T$ , и пусть, для простоты, это будет 28-е февраля 2003 г.) компании-импортеру придется купить 50,000 метрических тонн сахара-сырца по рыночной цене на тот момент. Таким образом, компания-импортер имеет короткую позицию в сахаресырце размером 50,000 тонн. Это же количество, измеренное в контрактах на сахар №11, торгуемых на NYBOT (США), равно приблизительно 982 контракта (размер контракта есть 112,000 фунтов). Пусть стратегия хеджирования будет производиться только лишь через контракты на сахар №11. Поэтому, условимся измерять величины позиций в количестве контрактов на сахар №11. Таким образом, речь идет о хеджировании короткой позиции в количестве сахара эквивалентного  $N$  (в нашем примере равного 982) контрактам сахара №11.

Назовем стратегией хеджирования переменное количество контрактов  $n(S(t),t)$ , в которые необходимо иметь в длинной позиции, для того чтобы были выполнены определенные условия, которые мы рассмотрим ниже.

Пусть, все время хеджирования  $T$  разбито на подинтервалы времени связанные с частотой нашего изменения размера хеджа, скажем, торговые дни так, что изменение нашей длинной позиции  $\Delta n_i$  будет происходить на закрытии временного подинтервала  $i$  ( $i$ -го торгового дня) по ценам закрытия этого временного подинтервала. Пусть  $i$  меняется от 1 до  $M$ . Используя данные обозначения, в конце подинтервала  $i$  величина длинной позиции есть  $n_i = n_{i-1} + \Delta n_i$ .



Допустим, что стоимость исполнения транзакций отсутствует. В реальности, существует два типа стоимости исполнения транзакций: комиссионные и bid-offer спрэд, причем, второй из них, вообще говоря, является функцией объема транзакции. Для ликвидных рынков которые мы рассматривали выше, суммарный эффект всех этих видов стоимостей исполнения транзакций обычно не превосходит десятых долей процента от объема транзакции в одну сторону, чем мы пренебрежем в данном исследовании. Более точное изучение эффекта влияния стоимости исполнения транзакции на результирующую стратегию будут произведены в дальнейших исследованиях.

Мы будем называть некоторую стратегию хеджирования  $n^*(S(t), t)$  оптимальной, если при следовании этой стратегии чистый средний абсолютный доход/потеря к концу интервала хеджирования будет максимальным. Для того, чтобы полностью определить что это значит, определим сначала саму функцию абсолютной дохода/потери в некоторый промежуточный момент времени  $t$  на некоторой определенной траектории цены  $S(t)$ .

В данных обозначениях, чистый абсолютный доход/потеря на переменной длинной позиции оцененный на конец  $i$ -го подинтервала времени по отношению к началу интервала хеджирования  $i=0$ , есть:

$$\sum_{j=1}^i n_{j-1} \cdot (S_j - S_{j-1}).$$

Аналогично, чистый абсолютный доход/потеря на постоянной короткой позиции оцененный на конец  $i$ -го подинтервала времени по отношению к началу интервала хеджирования  $i=0$ , есть:

$$-N \cdot (S_i - S_0).$$

Тогда, формула для чистого абсолютного дохода/потери в конечных разностях, оцененного на конец  $i$ -го подинтервала времени по отношению к началу интервала хеджирования  $i=0$ , есть:

$$P(S, t; n) = \sum_{j=1}^i n_{j-1} \cdot (S_j - S_{j-1}) - N \cdot (S_i - S_0).$$

Он, как видно, есть функционал траектории цены  $S(t)$  времени  $t$  и стратегии хеджирования  $n(S(t), t)$ . В непрерывном пределе  $M \rightarrow \infty$  данная формула принимает вид:

$$P(S, t; n) = \int_{\tau=0}^t n(S(\tau), \tau) \cdot dS(\tau) - N \cdot (S(t) - S(0)).$$

Заметим, что решение (оптимальная стратегия  $n^*(S(t), t)$ ) не будет зависеть от того, по отношению к какой точке по времени (в приведенных выше формулах – к началу интервала хеджирования) выписана формула для чистого абсолютного дохода/потери.

Рассмотрим подробнее граничные условия задачи.

В конце интервала хеджирования (при  $t=T$ ) мы обязаны быть хеджированы на 100%:

$$n(S(T), T) = N.$$

В любой промежуточный момент времени мы потребуем, чтобы длинная позиция никогда не превышала основную, короткую позицию:

$$0 \leq n(S(t), t) \leq N.$$

Т.е., мы будем искать оптимальную стратегию только среди неспекулятивных – спекулирование разрешено только лишь в пределах размера основной (короткой) позиции.

Мы рассмотрим два возможных типа начальных условий. Один тип соответствует случаю когда никаких определенных требований к начальному хеджу нет. Т.е., начальная длинная позиция  $n_0$ , определяется самим оптимальным решением:

$$n_0 = n^*(S(0), 0),$$

(стратегия со свободными начальными данными). Другой тип (менее спекулятивный) соответствует началу процедуры хеджирования из 100% захеджированной ситуации

$$n^*(S(0), 0) = N$$

(стратегия с 100%-ым хеджем вначале).

В силу приведенных выше формул, каждая реализация траектории цен на товар  $S(t)$  в интервале времени  $t \in [0, T]$  приведет к некоей реализации чистого абсолютного дохода/потери  $P(S, t; n)$ . Компания-импортер заинтересована в максимизации чистого абсолютного дохода/потери при условии что на пути к достижению этой цели она не испытывает риска больше чем может себе позволить при выполнении оговоренных выше условий на возможные стратегии хеджирования. Это должно выполняться в среднем по всем возможным траекториям цены  $S(t)$ .

Теперь мы готовы сформулировать задачу поиска оптимальной стратегии как задачу *стохастической оптимизации*.

В случае задачи *со свободными начальными данными*, оптимальная стратегия хеджирования есть решение следующей задачи:

$$\langle P(S, t; n) \rangle \rightarrow \max,$$

при выполнении условий:

$$\langle (\Delta P(S, t; n))^2 \rangle \leq \Omega^2,$$

$$n(S(T), T) = N,$$

$$0 \leq n(S(t), t) \leq N.$$

Здесь,  $\langle \dots \rangle$  означает усреднение по всем возможным траекториям цены  $S(t)$ , а  $\Omega$  – некий наперед заданный уровень дозволенного риска.

Аналогично, задача *со 100%-ым хеджем вначале* формулируется как:

$$\langle P(S, t; n) \rangle \rightarrow \max,$$

при соблюдении условий:

$$\begin{aligned} \langle (\Delta P(S, t; n))^2 \rangle &\leq \Omega^2, \\ n(S(T), T) &= N, \\ n(S(0), 0) &= N, \\ 0 \leq n(S(t), t) &\leq N. \end{aligned}$$

В решении такого рода задач существенным шагом является моделирование пространства возможных траекторий цен  $S(t)$ . Если пространство возможных траекторий определено, то данная задача может быть решена численно как задача квадратической условной оптимизации.

Решения такого рода задач будут верны «в среднем» по всем возможным траекториям, по аналогии с решениями, предложенными одним из авторов (А.Ч.) для более общей задачи подбора оптимальных весов инвестиционного портфеля [4]. Подобные методы решения показали себя как обладающими большей предсказательной силой и более устойчивыми по сравнению с, так называемыми, «историческими» решениями, т.е. решениями оптимальными на определенном интервале прошлой истории. Одновременно с этим, было показано, что решения задач стохастической оптимизации требуют намного больших вычислительных ресурсов даже для задач небольшой размерности. За деталями преимуществ подобного рода постановок, см. [4].

#### Пример решения задач о 10-дневном хеджировании закупки сахара

Здесь мы приведем результаты решения задачи со свободными начальными условиями для задачи о закупке сахара-сырца через 10 (торговых) дней.

Вначале, приведем матрицу дискретизации пространства возможных абсолютных изменений цен на сахар №11.

**Таблица 4.**

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
200%	0.39	0.56	0.68	0.78	0.88	0.97	1.05	1.12	1.19	1.25
180%	0.36	0.51	0.61	0.70	0.79	0.87	0.94	1.01	1.07	1.13
160%	0.32	0.45	0.54	0.63	0.70	0.78	0.84	0.90	0.95	1.00
140%	0.28	0.39	0.48	0.55	0.62	0.68	0.74	0.79	0.84	0.88
120%	0.24	0.34	0.41	0.47	0.53	0.58	0.63	0.68	0.72	0.75
100%	0.20	0.28	0.34	0.39	0.44	0.49	0.53	0.56	0.60	0.63
80%	0.16	0.23	0.27	0.31	0.35	0.39	0.42	0.45	0.48	0.51
60%	0.12	0.17	0.21	0.24	0.27	0.29	0.32	0.34	0.36	0.38
40%	0.08	0.11	0.14	0.16	0.18	0.20	0.21	0.23	0.24	0.26
20%	0.04	0.06	0.07	0.08	0.09	0.10	0.11	0.12	0.13	0.13
0%	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.01	0.01	0.01
-20%	-0.04	-0.05	-0.07	-0.07	-0.08	-0.09	-0.10	-0.11	-0.11	-0.12
-40%	-0.08	-0.11	-0.13	-0.15	-0.17	-0.19	-0.20	-0.22	-0.23	-0.24
-60%	-0.12	-0.17	-0.20	-0.23	-0.26	-0.28	-0.31	-0.33	-0.35	-0.37
-80%	-0.16	-0.22	-0.27	-0.31	-0.35	-0.38	-0.41	-0.44	-0.47	-0.49
-100%	-0.20	-0.28	-0.34	-0.39	-0.43	-0.48	-0.52	-0.55	-0.59	-0.61
-120%	-0.24	-0.33	-0.40	-0.46	-0.52	-0.57	-0.62	-0.66	-0.70	-0.74
-140%	-0.27	-0.39	-0.47	-0.54	-0.61	-0.67	-0.72	-0.78	-0.82	-0.86
-160%	-0.31	-0.45	-0.54	-0.62	-0.70	-0.77	-0.83	-0.89	-0.94	-0.99
-180%	-0.35	-0.50	-0.61	-0.70	-0.78	-0.86	-0.93	-1.00	-1.06	-1.11
-200%	-0.39	-0.56	-0.67	-0.78	-0.87	-0.96	-1.04	-1.11	-1.18	-1.24

Здесь на каждый  $i$ -й день ( $1 \leq i \leq 10$ ), пространство возможных изменений цен на сахар ограничено интервалом  $[-2\sigma_i, +2\sigma_i]$ , (где  $\sigma_i$  есть стандартное отклонение изменений цены на сахар за  $i$  дней). Если бы изменения цен на сахар описывались бы нормальным распределением, то таким образом, мы охватили бы более 95% всех возможных событий. (Мы не предполагаем никакого определенного распределения вероятностей для изменений цен на сахар).

Пространство событий моделировалось с помощью 3,500 возможных траекторий цен, полученных используя исторические цены на сахар №11. В качестве ограничения на уровень риска было выбрано  $\Omega = 5\%$ . Для данного пространства событий, матрица оптимальных отношений хеджа:

$$\frac{n^*(S(t), t)}{N}$$

имеет вид:

**Таблица 5.**

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
200%	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%
180%	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%
160%	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%
140%	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%
120%	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%
100%	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%
80%	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%
60%	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%
40%	100.0%	100.0%	96.3%	97.6%	96.6%	97.7%	97.4%	99.8%	99.9%	95.0%	100.0%
20%	100.0%	90.0%	90.1%	88.6%	93.9%	93.8%	91.6%	96.2%	96.1%	96.0%	100.0%
0%	100.0%	72.6%	78.7%	81.6%	85.0%	85.5%	87.0%	91.5%	89.9%	90.8%	100.0%
-20%	0.0%	59.5%	72.9%	80.5%	82.2%	84.4%	85.1%	86.7%	85.8%	86.1%	100.0%
-40%	2.7%	64.0%	74.8%	77.5%	76.8%	81.2%	84.2%	85.5%	85.0%	88.7%	100.0%
-60%	26.2%	66.0%	72.4%	76.6%	77.0%	83.8%	86.7%	85.1%	91.8%	92.2%	100.0%
-80%	40.5%	66.0%	78.2%	79.4%	82.6%	85.5%	85.4%	92.2%	94.4%	93.7%	100.0%
-100%	48.0%	73.0%	75.8%	82.3%	85.2%	88.2%	87.3%	93.8%	93.8%	94.0%	100.0%
-120%	54.8%	71.5%	80.8%	84.1%	90.9%	90.7%	95.1%	95.7%	95.9%	97.6%	100.0%
-140%	56.0%	75.8%	84.0%	85.3%	96.0%	97.9%	94.0%	97.1%	98.1%	99.3%	100.0%
-160%	58.5%	79.8%	83.7%	85.4%	94.3%	94.4%	97.4%	98.7%	99.5%	100.0%	100.0%
-180%	59.4%	78.6%	90.0%	93.5%	96.1%	98.1%	100.0%	100.0%	99.9%	100.0%	100.0%
-200%	72.9%	89.0%	95.4%	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%

Интересно, что, будучи в целом достаточно консервативной, данное решение «старается заработать» на падениях цены при временах достаточно далеких от времени закупки. При приближении к времени закупки, средний уровень хеджирования растет в пределе до 100%.

Для практического применения данной таблицы к хеджированию вдоль некой траектории цен, мы предположили, что мы будем использовать «разности назад» в терминах конечно-разностных схем. В силу того, что оптимальные отношения хеджа заданы на сетке, то необходимо выбрать некий способ выбирать хедж отношение при изменении цены на определенную величину. Так, в соответствии с данной конвенцией, если цена за первый день упала на -0.08, то в конце первого дня мы должны установить хедж в 26.2% от хеджируемой позиции. Точность

данного подхода, возможно, можно улучшить, используя более высоко-точные алгоритмы аппроксимации по Таблице №5, чем «разности назад». Здесь нас интересует принципиальная применимость предложенных алгоритмов даже при таком простейшем способе аппроксимации как «разности назад».

Приведем анализ полученных результатов. В Таблице 6 приведены средние по траекториям цен сравнительные характеристики доходности и риска для двух стратегий: при отсутствии хеджирования и при использовании оптимального решения приведенного в Таблице 5 с использованием «разностей назад».

**Таблица 6.**

	Без хеджа	Оптимальный хедж
<b>Средняя Доходность</b>	<b>-0.4%</b>	<b>0.2%</b>
<b>Средне-квадратическое отклонение доходности</b>	<b>43.8%</b>	<b>11.1%</b>
<b>Вероятность потери &lt;0</b>	<b>46.9%</b>	<b>22.6%</b>
<b>Вероятность потери &lt;0.1</b>	<b>35.9%</b>	<b>6.3%</b>
<b>Вероятность потери &lt;0.2</b>	<b>26.6%</b>	<b>1.7%</b>

Полное поведение функции распределения вероятностей терминальной доходности (дохода/потери в конце 10-го дня) приведено на следующей гистограмме.

Обратим внимание на тот факт, что в Таблице 6 средне-квадратическое отклонение доходности (11.1%) есть величина большая, чем  $\Omega$  (5%). Это связано с тем, что анализ в Таблице 6 произведен на уже практической реализации точного решения с учетом погрешностей «набегающих» за счет аппроксимации точного численного решения на конкретные траектории с учетом «разностей назад».

**График 1.**



## Выводы

В работе описаны новые алгоритмы оптимального хеджирования товарных экспортных/импортных потоков основанные на методах стохастической оптимизации. Данные стратегии по построению ведут к наибольшей среднеожидаемой доходности при непревышении некоторого ограничения на риск. Подобного рода решения задач с использованием стохастической оптимизации с ограничительными условиями на различные меры риска хорошо зарекомендовало себя в решении задач построения оптимального портфеля. Такого рода решения обладают лучшими, чем исторические (или, построенные лишь по одной исторической реализации цены) предсказательными свойствами.

Предложенные стратегии есть динамические стратегии, исполняемые через ликвидные фьючерсные рынки. Показаны практические преимущества фьючерсов над опционами.

В разобранный примере хеджирования сахара №11 показаны практические свойства получаемых оптимальных решений. Оптимальное решение, по своему построению, ведет к стратегиям, дающим большую среднеожидаемую доходность, чем для нехеджированного случая. Также, оптимальное решение для сахара №11 значительно уменьшило риск по сравнению с нехеджированным случаем. В особенности уменьшились вероятности больших потерь: в 3.9 раза уменьшилось среднеквадратическое отклонение терминальной доходности, в 2.1 раза уменьшилась вероятность потери, в 5.7 раз уменьшилась вероятность потери больше чем  $-0.1$ , и в 15.7 раз уменьшилась вероятность потери больше чем  $-0.2$ .

Авторы видят большую потенциальную практическую значимость полученных результатов.

## ССЫЛКИ

- [1] П. Волостригов. «Живем за счет прошлого. И будущего.» Российская Федерация сегодня. №14 2002 г.
- [2] J. C. Hull. Options, Futures, & Other Derivatives. Fourth Edition. Prentice Hall. 2000
- [3] S. Butenko, A. Golodnikov, S. Uryasev. Optimal Security Liquidation Algorithms. University of Florida. Research Report #2003-01. January 8, 2003.
- [4] A. Chekhlov, S. Uryasev, and M. Zabarankin “Drawdown Measure in Portfolio Optimization.” Submitted to J. of Banking and Finance. Also, University of Florida Research Report #2003.
- [5] M. Smirnov. Portfolio Insurance and Changes in Distributions of Portfolio Returns and Drawdowns. Columbia University, 2001.
- [6] R. N. Mantegna and H. E. Stanley. An Introduction to Econophysics. Correlations and Complexity in Finance. Cambridge University Press. 2000.
- [7] J.-P. Bouchaud and M. Potters. Theory of Financial Risks. From Statistical Physics to Risk Management. Cambridge University Press. 2000.
- [8]. B. Efron and R. J. Tibshirani. An Introduction to the Bootstrap. Monographs on Statistics and Applied Probability #57. Chapman & Hall/CRC. 1998.
- [9]. J. Bertoin. Levy Processes. Cambridge Tracts in Mathematics #121. Cambridge University Press. 1996.
- [10]. N. A. Chriss. Black-Scholes and Beyond. Option Pricing Models. McGraw-Hill trade. 1996.